2023 考研数学二真题及解析

老王（王博）

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1．曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为（　　）.

（A）$y=x+\mathrm{e}$　　（B）$y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$　　（C）$y=x$　　（D）$y=x-\frac{1}{\mathrm{e}}$

【答案】（B）

【解析】方法 1. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-1\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\mathrm{e}+\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

故曲线的斜渐近线方程为 $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$．故选（B）

方法 2. $y=x\ln\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)=x\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)\right]$

$=x+x\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)=x+\frac{1}{\mathrm{e}}+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=0$，故 $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$ 为曲线的斜渐近线.

【评注】由 $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，知 $x\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}+\alpha$

【评注】1.由 $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，知 $x\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}+\alpha$

2.本题属于常规题：《基础班》《强化班》的例子不再对应列举，《答题模版班》思维定势 19【例 13】

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0.\end{cases}$ 的一个原函数是(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

【答案】 (D).

【分析】本题主要考查原函数的概念,分段函数不定积分的求法以及函数可导与连续的关系.

【详解】由于当$x<0$时，$F(x)=\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C_1$

当$x>0$时，$F(x)=\int (x+1)\cos x\,\mathrm{d}x=(x+1)\sin x+\cos x+C_2$

由于$F(x)$在$x=0$处可导性，故$F(x)$在$x=0$处必连续

因此，有$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$，即 $C_1=1+C_2$.

取$C_2=0$得$F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\le 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$ 应选(D).

【评注】此题考查分段函数的不定积分，属于常规题，与 2016 年真题的完全类似，在《真题精讲班》系统讲解过. 原题为

已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\ge 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$的一个原函数是(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\ge 1.\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\ge 1.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1.\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1.\end{cases}$

3.设数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足$x_1=y_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\sin x_n,y_{n+1}=y_n^2\ (n=1,2,\cdots)$，则当$n\to\infty$时（　）

（A）x_n是y_n的高阶无穷小（B）y_n是x_n的高阶无穷小

（C）x_n是y_n的等阶无穷小 （D）x_n是y_n的同阶但不等价无穷小

【答案】（B）

【解析】由$y_1=\dfrac{1}{2},y_{n+1}=y_n^2$,知$y_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$，则有$y_{n+1}<\dfrac{1}{2}y_n$

利用$x_{n+1}=\sin x_n>\dfrac{2}{\pi}x_n$，则$\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{\dfrac{2}{\pi}x_n}$

故 $\dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}\le\dfrac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2}{\pi}x_n}=\dfrac{\pi}{4}\dfrac{y_n}{x_n}\le\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2\dfrac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\le\cdots\le\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n\dfrac{y_1}{x_1}=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$

于是 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$，由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=0$，选（B）

【评注】本题属于今年难度较大的题，涉及到两个递推数列确定的无穷小的比较，涉及到不等式的放缩，有一定的综合性.

4．若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则（　　）

（A）$a<0$，$b>0$　　（B）$a>0$，$b>0$

（C）$a=0$，$b>0$　　（D）$a=0$，$b<0$

【答案】（C）

【解析】特征方程为 $r^2+ar+b=0$，解得 $r_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$．记 $\Delta=a^2-4b$

当 $\Delta>0$ 时，方程的通解为 $y(x)=c_1e^{r_1\cdot x}+c_2e^{r_2\cdot x}$，当 c_1,c_2 不全为零时 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

当 c_1,c_2 不全为零时 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

当 $\Delta=0$ 时，$r_1=r_2=\dfrac{-a}{2}<0$，方程的通解为 $y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2xe^{r_1x}$，当 c_1,c_2 不全为零时 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

当 $\Delta<0$ 时，$r_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}i}{2}=-\dfrac{a}{2}\pm\beta i$，方程的通解为 $y(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$.

只有当 $a=0$，且 $\Delta=a^2-4b<0$，即 $b>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=0$，此时方程的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界．故选（C）

【评注】此题关于 $x\to+\infty$ 方向的讨论，在《基础班》习题课上讲解过，见《基础班》习题课第八讲《常微分方程》第 15 题.

5.设 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t,\end{cases}$ 确定，则（　）

（A）$f(x)$ 连续，$f'(0)$ 不存在　　（B）$f'(0)$ 存在，$f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续

（C）$f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在　　（D）$f''(0)$ 存在，$f''(x)$ 在 $x=0$ 不连续

【答案】（C）

【解析】$t\ge0$ 时 $\begin{cases}x=3t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$，即有 $y=\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}$. $t<0$ 时 $\begin{cases}x=t,\\ y=-t\sin t,\end{cases}$，即有 $y=-x\sin x$.

$y=\begin{cases}\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}, x\ge 0\\ -x\sin x, x<0\end{cases}$,显然有 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续，且 $f(0)=0$

$x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{9}\cos\dfrac{x}{3}$；$x<0$ 时，$f'(x)=-\sin x-x\cos x$，

利用导数定义可得 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}-0}{x}=0$，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x\sin x}{x}=0$，即得 $f'(0)=0$

易验证 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=0=f(0)$，即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{9}\cos\dfrac{x}{3}}{x}=\dfrac{2}{9}$，$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin x-x\cos x}{x}=-2$，故 $f''(0)$ 不存在，选（C）

【评注】此题考查参数方程确定的分段函数，只要在参数方程中去掉绝对值的过程，就成了我们常规的分段函数求导的问题，无论是《基础班》第二讲例 24，《强化班》第二讲例 17.

6.若函数 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值，则 $\alpha_0=$（　）

（A）$-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$　（B）$-\ln(\ln 2)$（C）$-\dfrac{1}{\ln 2}$（D）$\ln 2$

【答案】（A）

【解析】反常积分的判别规律知 $\alpha+1>1$，即 $\alpha>0$ 时反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ 收敛

此时 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{(\ln x)^{\alpha}}\Big|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}$

令 $f'(\alpha)=-\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln\ln 2}{(\ln 2)^{\alpha}}=-\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{1}{(\ln 2)^{\alpha}}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\ln\ln 2\right)=0$

得唯一驻点 $\alpha=-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$，故选（A）

【评注】此题是属于由反常积分确定的函数求最值的问题，积分本身不难，积分结果再求导，找驻点得结果.难度不大，只要基本计算能力过关，可轻松应对.《基础班》《强化班》相应问题得组合而已.

7.设函数 $f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$，若 $f(x)$ 没有极值点，但曲线 $f(x)$ 有拐点，则 a 的取值范围是（　）

（A）$[0,1)$　（B）$[1,+\infty)$　（C）$[1,2)$　（D）$[2,+\infty)$

【答案】（C）

【解析】 $f(x)=(x^2+a)e^x$， $f'(x)=(x^2+a+2x)e^x$， $f''(x)=(x^2+a+4x+2)e^x$

由 $f'(x)=\left[(x+1)^2+a-1\right]e^x$，知 $a-1\geq 0$ 时， $f'(x)\geq 0$，此时 $f(x)$ 无极值点.

由 $f''(x)=\left[(x+2)^2+a-2\right]e^x$，知 $a-2<0$ 时， $f''(x)$ 在 $x=2\pm\sqrt{2-a}$ 的左右两侧变号，

依题意有 $a\in[1,2)$，选（C）

【评注】本题考查了极值点、拐点的必要条件与判定，题目本身是常规的，分开对这两个考点出题，在《基础班》和《强化班》都讲过，但这种问法有些学生可能会觉得很别扭.

8．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 n 阶可逆矩阵， $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵， $\boldsymbol{M}^*$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*$ 为（　　）

（A） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$　　（B） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$　　（D） $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$

【答案】（D）

【解析】由分块矩阵求逆与行列式的公式，结合 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$$，选（D）

【评注】这钟类型的题在 02 年，09 年均考过完全类似的题，《基础班》第二讲也讲过，原题为

【例 1】设 A^*,B^* 分别为 n 阶可逆矩阵 A,B 对应的伴随矩阵，$\boldsymbol{C}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*$

9.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为（　　）.

（A） $y_1^2+y_2^2$　（B） $y_1^2-y_2^2$　（C） $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　（D） $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】（B）

【详解】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$

方法 1.二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 4\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$，

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+3 & -4\\ -1 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+7)(\lambda-3)=0$，得特征值为 $0,-7,3$，故选（B）

方法 2. $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$

$$=2\left[x_1^2+x_1\left(x_2+x_3\right)+\frac{\left(x_2+x_3\right)^2}{4}\right]-\frac{\left(x_2+x_3\right)^2}{2}-3x_2^2-3x_3^2+8x_2x_3$$

$$=2\left[x_1+\frac{x_2+x_3}{2}\right]^2-\frac{{x_2}^2+2x_2x_3+x_3^2+6x_2^2+6x_3^2-16x_2x_3}{2}=2\left[x_1+\frac{x_2+x_3}{2}\right]^2-\frac{7}{2}\left(x_2-x_3\right)^2$$

故所求规范形为 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2-y_2^2$，故选（B）

【评注】本题考查二次型的规范形，与考查正负惯性指数是同一类题，在《基础班》《强化班》均讲过.《解题模板班》类似例题为

【11】设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T,\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$， α,β 线性无关，则二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$$

的规范型为(　　).

(A) y_1^2　　(B) $y_1^2+y_2^2$　　(C) $y_1^2-y_2^2$　　(D) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

10. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示，也由与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 表示，则 $\boldsymbol{\gamma}=$（　　）.

（A） $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$ （B） $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix}$ （C） $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ （D） $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix}$

【答案】（D）

【解析】由题意可设 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2$，只需求出 x_1,x_2 即可

即解方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2-y_1\boldsymbol{\beta}_1-y_2\boldsymbol{\beta}_2=0$

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2\right)=\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&-5&0\\3&1&-9&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

得 $\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)^T=k\left(-3,1,-1,1\right)^T$， k 为任意常数

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=-3k\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2=-3k\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=-k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix}$$，故选（D）

【评注】1.此题与《强化班》讲义第三讲练习第 12 题完全类似，原题为

【12】(1)设α_1,α_2，β_1,β_2均是三维列向量，且α_1,α_2线性无关，β_1,β_2线性无关，证明存在非零向量ξ，使得ξ既可由α_1,α_2线性表出，又可由β_1,β_2线性表出.

(2)当$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix}$；$\beta_1=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix}-3\\-4\\3\end{bmatrix}$时，求所有既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，又可$\beta_1,\beta_2$线性表出的向量。

2.此问题与两方程组的公共解问题是一模一样的，见《强化班》第四讲题型五例 2

《解题模板班》综合练习解答题第一题第 2 问.

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上。

11．若$x\to 0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=e^{x^2}-\cos x$为等价无穷小，则$ab=$______

【答案】-2.

【解析】$g(x)=e^{x^2}-\cos x=1+x^2-\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)+o(x^2)=\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2)$

$$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)=ax+bx^2+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)=(a-1)x+\left(b-\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)$$

由题设可知$a+1=0$，$b-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，故$a=-1,b=2$，于是$ab=-2$.

【评注】常规题，无论是《基础班》《强化班》《解题模板班》均有所涉及.不再列举

12．曲线$y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$的弧长为________.

【答案】$\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$

【解析】由曲线表达式知$-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$，$y'=\sqrt{3-x^2}$

直接由弧长公式知$l=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+3-x^2}\,dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$

令$x=2\sin t$，则$l=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,dt=\dfrac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$

【评注】本题是常规题。《基础班》第五讲&5.3【考点 6】例 10，原题为**【例 10】**求连续曲线段$y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$的弧长.

13．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xz=2x-y$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$______

【答案】$-\dfrac{3}{2}$

【解析】当 $x=1,y=1$ 得 $z=0$

原方程两边对 x 求偏导得 $e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}+z+x\dfrac{\partial z}{\partial x}=2$，代入 $(1,1,0)$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$

方程两边再对 x 求偏导得 $e^z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+e^z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，

代入 $(1,1,0)$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$，得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{3}{2}$

【评注】常规题隐函数在具体点的二阶导.《基础班》《强化班》《解题模板班》此类题均放在隐函数的极值问题那一类了.

14.曲线 $3x^3=y^5+2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为______

【答案】$-\dfrac{11}{9}$

【解析】当 $x=1$ 时 $3=y^5+2y^3$，得 $y=1$

曲线方程两边对 x 求导得：$9x^2=5y^4y'+6y^2y'$

代入 $x=1$，$y=1$ 得 $9=5y'+6y'$，即 $y'=\dfrac{9}{11}$，故所求法线斜率为 $-\dfrac{11}{9}$

【评注】常规题《基础班》习题讲解第二讲第 7 题，原题为

【7】求曲线 $xy+\ln y=x^2$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程及夹在两坐标轴间的法线长.

15.设 $f(x)$ 连续，且 $f(x+2)-f(x)=x$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$______

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】令 $F(x)=\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x+2)-f(x)=x$

于是 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+C$，又 $F(0)=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=0$，所以 $C=0$

得 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=F(1)=\dfrac{1}{2}$

【评注】此题为《解题模板班》综合练习填空题第 7 小题，在我编写的最后模拟卷三模第（12）题。微博上 11 月 26 日也传过，原题是

（12）设 $f(x)$ 连续，且 $f(x+2)-f(x)=\sin x$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$______

16．已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ ax_1+bx_2=2 \end{cases}$ 有解，其中 a,b 为常数，若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4$，

则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$______

【答案】8

【解析】由方程组有解知 $r(A)=r(A,b)\le 3<4$（系数矩阵只有 3 列）于是 $|A,b|=0$

故 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+2(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}+8=0$

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=8$

【评注】此题考查了非齐方程组有解的判定，考查了行列式行列展开定理.本身难度不大，具备一定基本功可顺利解出.

三、解答题：17-22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）

设曲线 $L:y=y(x)(x>\mathrm{e})$ 经过点 $(\mathrm{e}^2,0)$，该 L 上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(I)求 $y=y(x)$

(II)在 L 上求一点，使该点的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小.并求该最小面积.

【解析】(I)设曲线在 (x,y) 点处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，

令 $X=0$ 切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.并依题意，有 $y-xy'=x, y|_{x=\mathrm{e}^2}=0$.

将上述方程写成 $y'-\frac{1}{x}y=-1$，

可解得 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int -e^{-\int\frac{1}{x}dx}+C\right)=x\left(\int -\frac{1}{x}dx+C\right)=x(C-\ln x)$.

代入初始条件 $x=e^2, y=0$，得 $C=2$．故所求曲线的方程为 $y=x(2-\ln x)$.

(II) 设曲线 L 在点 $(x,x(2-\ln x))$ 出的切线方程为

$$Y-x(2-\ln x)=\left[x(2-\ln x)\right]'(X-x)=(1-\ln x)(X-x)$$

令 $X=0$，则 $Y=x$，令 $Y=0$，则 $X=\dfrac{x}{\ln x-1}$

则切线与两坐标轴所围三角形的面积为 $S(x)=\dfrac{1}{2}XY=\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{\ln x-1}$

令 $S'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{x(2\ln x-3)}{(\ln x-1)^2}=0$，得唯一驻点为 $x=e^{\frac{3}{2}}$（因为 $x>e$）

且当 $e<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$S'(x)<0$，当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$S'(x)>0$，故 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 为极小值点，也为最小值点

且最小值 $S\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=e^3$

【评注】本题第(I)问为王博主编《考研数学一本通》高数篇 P168【例 11】原题

【例 11】已知某曲线经过点 $(1,1)$，它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求它的方程.

第(II)问与《强化班》习题课第四讲第 9 题解法完全一致，原题为

【9】若抛物线 $y=px^2+qx(p<0,q>0)$ 在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S，问 p,q 为何值时，S 取得最大值，并求此最大值.

18.（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{\cos y}+\frac{1}{2}x^2$ 的极值

【解析】$f_x(x,y)=e^{\cos y}+x$，$f_y(x,y)=xe^{\cos y}(-\sin y)$，

令 $f_x(x,y)=0$，$f_y(x,y)=0$，解得驻点为 $(-e^{-1},k\pi)$，其中 k 为奇数，

驻点为 $(-e,k\pi)$，其中 k 为偶数，

$$f_{xx}(x,y)=1,\quad f_{xy}(x,y)=e^{\cos y}(-\sin y),\quad f_{yy}(x,y)=xe^{\cos y}\sin^2 y+xe^{\cos y}(-\cos y)$$

当 k 为奇数时，在驻点 $(-e^{-1},k\pi)$ 处，$A=1$，$B=0$，$C=-e^{-2}$，$AC-B^2<0$

此时故 $(-e^{-1},k\pi)$ 不是极值点.

当 k 为偶数时，在驻点 $(-\mathrm{e},k\pi)$ 处，$A=1$，$B=0$，$C=\mathrm{e}^2$，$AC-B^2>0$

此时故 $(-\mathrm{e},k\pi)$ 为极小值点.

且极小值为 $f(-\mathrm{e},k\pi)=-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$

【评注】本题无条件极值是考研题，在判别法失效时很多考生不会处理，我在《解题模板班》思维定势 36，例 32 重点讲过，原题是.【例 6】求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值，此例题也是 $(0,0)$ 点判别法失效的情形.

19.（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge1\right\}$

(I)求 D 的面积

(II)求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

【解析】(I) $A=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)\Bigg|_1^{+\infty}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

(II)$V=\pi\displaystyle\int_1^{+\infty}y^2\mathrm{d}x\ =\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\pi\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\pi\left[-\frac{1}{x}-\arctan x\right]_1^{+\infty}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

【评注】本题是常规题与 2020 年数二第 18 题和数三的第 12 题完全类似，在《真题精讲班》重点讲过.原题为（20 数二（18））设函数 $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且满足 $2\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)+\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{f}\left(\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}\right)=\dfrac{\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}}{\sqrt{1+\boldsymbol{x}^2}}$ 求 $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$ 并求曲线 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right),\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{2},\boldsymbol{y}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $\boldsymbol{y}$ 轴围成的图形绕 $\boldsymbol{x}$ 轴旋转一周的体积.

（20 数三（12））设平面区域 $D=\left\{(x,y)|\dfrac{x}{2}\le y\le\dfrac{1}{1+x^2},0\le x\le1\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为______.

20（本题满分 12 分）

设平面区域 D 位于第一象限，由曲线 $x^2+y^2-xy=1, x^2+y^2-xy=2,$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$， $y=0$ 所围成，

计算 $\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【详解】令 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 则 $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}} r\le\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}$，

$$\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{r\mathrm{d}r}{r^2\left(3\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}-\ln\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2\theta}{3+\tan^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{3+\tan^2\theta}=\ln\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\ln 2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\ln 2}{8\sqrt{3}}$$

【评注】本题一部分同学不知道这是两个偏心的椭圆围成的一部分，另外用极坐标之后被形式吓住了.我们在《强化班》上也强调对图形不熟悉的情形下直接带坐标方程的处理方法.

21.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数，证明

(I)若 $f(0)=0$，则至少存在一点 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}\left[f(a)+f(-a)\right]$；

(II)若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则至少存在一点 $\eta\in(-a,a)$，使得 $\left|f''(\eta)\right|\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$.

【证明】(Ⅰ) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\alpha)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\alpha)}{2}x^2$,

分别令 $x=a$ 和 $x=-a$ 得

$$f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\alpha_1)}{2}a^2, 0<\alpha_1<a$$

$$f(-a)=-f'(0)a+\frac{f''(\alpha_2)}{2}a^2, -a<\alpha_2<0$$

两式相加得 $f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}\left[f''(\alpha_1)+f''(\alpha_2)\right]$

又由于 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故 $f''(x)$ 在 $\left[\alpha_1,\alpha_2\right]$ 上必有最大值 M，最小值 m

$m \le \dfrac{f''(\alpha_1)+f''(\alpha_2)}{2} \le M$，由介值定理知，存在$\xi \in [\alpha_1,\alpha_2] \subset (-a,a)$，

$f'(\xi)=\dfrac{f''(\alpha_1)+f''(\alpha_2)}{2}$，故 $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$

(II) 设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (-a,a)$ 处取得极值，由费马引理 $f'(x_0)=0$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\beta)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)++\frac{f''(\beta)}{2!}(x-x_0)^2$$

分别令 $x=a$ 和 $x=-a$ 得

$$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\beta_1)}{2}(a-x_0)^2,\quad 0<\beta_1<a$$

$$f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\beta_2)}{2}(-a-x_0)^2\ -a<\beta_2<0$$

两式相减.并取绝对值，得

$$|f(a)-f(-a)|=|\frac{f''(\beta_1)}{2}(a-x_0)^2-\frac{f''(\beta_2)}{2}(-a-x_0)^2|\le|\frac{f''(\beta_1)}{2}|(a-x_0)^2+|\frac{f''(\beta_2)}{2}|(a+x_0)^2.$$

记$|f''(\eta)|=\max\{|f''(\beta_1)|,|f''(\beta_2)|\}$

则$|f(a)-f(-a)|\le\dfrac{1}{2}|f''(\eta)|(a-x_0+a+x_0)^2=2a^2|f''(\eta)|$

$$|f''(\eta)|\ge\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$$

【评注】【评注】在我编写的最后模拟卷二模第（20）题.微博上 11 月 26 日也传过，

（19）设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有二阶连续导数，且 $f'(0)=f'(1)=0$.

(I)证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$2f(\frac{1}{2})=f(0)+f(1)+\dfrac{f''(\xi)}{4}$；

(II)证明至少存在一点$\eta\in(0,1)$，使得$|f(1)-f(0)|\le\dfrac{|f''(\eta)|}{4}$.

22.（本题满分 12 分）

设矩阵A满足对任意x_1,x_2均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$

(I)求矩阵A

(II)求可逆矩阵P与对角矩阵Λ，使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

【详解】(I)由 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 对任意 x_1,x_2 均成立

知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

(II)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ 得

特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$.

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}-3&-1&-1\\-2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda=-2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,-1,1)^T$，;

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(4,3,1)^T$，

由 $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-2)^T$，

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0&4&1\\1&3&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

【评注】本题第(I)问只要能将右端矩阵写成矩阵乘向量的形式即可，第(II)问也是常规题，见《强化班》第五讲题型四例2，原题为

【例 2】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 中.

(1) 求 x 和 y 的值.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.