2021 年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 由$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt \sim \int_0^{x^2} t^3 dt=\frac{1}{4}x^8(x\to 0)$得$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$为$x^7$的高阶无穷小,应选(C).

(2)【答案】 (D).

【解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=f(0)$,所以$f(x)$在$x=0$处连续;

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$得

$f'(0)=\frac{1}{2}\neq 0$,应选(D).

(3)【答案】 (C).

【解】 设圆柱体的底面半径为$r(t)$,高为$h(t)$,且$\frac{dr}{dt}=2,\frac{dh}{dt}=-3$,

圆柱体的体积为$V(t)=\pi r^2 h$,表面积为$S(t)=2\pi r^2+2\pi r\cdot h$,

则$\frac{dV}{dt}=2\pi rh\cdot\frac{dr}{dt}+\pi r^2\cdot\frac{dh}{dt},\frac{dS}{dt}=4\pi r\cdot\frac{dr}{dt}+2\pi h\frac{dr}{dt}+2\pi r\frac{dh}{dt}$,

代入$r=10,h=5,\frac{dr}{dt}=2,\frac{dh}{dt}=-3$得,$\frac{dV}{dt}=-100\pi,\frac{dS}{dt}=40\pi$,应选(C).

(4)【答案】 (A).

【解】 因为$f(x)=ax-b\ln x$有两个零点,所以由罗尔定理,存在$c\in(0,+\infty)$,使得$f'(c)=a-\frac{b}{c}=0$,从而$b=ac>0$.

令$f'(x)=a-\frac{b}{x}=0$得$x=\frac{b}{a}$,

因为$f''(x)=\frac{b}{x^2}>0$,所以$x=\frac{b}{a}$为函数$f(x)=ax-b\ln x$的极小值点,极小值为

$f\left(\frac{b}{a}\right)=b-b\ln\frac{b}{a}=b\left(1-\ln\frac{b}{a}\right)$,

又$f(0+0)=+\infty,f(+\infty)=+\infty$,

所以$f(x)=ax-b\ln x$有两个零点等价于$b\left(1-\ln\frac{b}{a}\right)<0$,即$\frac{b}{a}>e$,应选(A).

(5)【答案】 (D).

【解】 $f'(x)=\sec x\tan x,f'(0)=0$,

$f''(x)=\sec^2 x\tan x+\sec^3 x,f''(0)=1$,

则$a=f'(0)=0,b=\frac{f''(0)}{2!}=\frac{1}{2}$,应选(D).

(6)**【答案】** (C).

【解】 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两边对 x 求导得

$$f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1),$$

取 $x=0$,得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$;

$f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边对 x 求导得

$$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x,$$

取 $x=1$,得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$,

解得 $f_1'(1,1)=0,f_2'(1,1)=1$,故 $df(1,1)=dy$,应选(C).

(7)**【答案】** (B).

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{2n}\right)\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$,

应选(B).

(8)**【答案】** (B).

【解】 由题可得 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

令 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda)=0$,

得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=3$,应选(B).

(9)**【答案】** (D).

【解】 令 $\boldsymbol{\alpha}_1=k_{11}\boldsymbol{\beta}_1+k_{12}\boldsymbol{\beta}_2+k_{13}\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=k_{21}\boldsymbol{\beta}_1+k_{22}\boldsymbol{\beta}_2+k_{23}\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=k_{31}\boldsymbol{\beta}_1+k_{32}\boldsymbol{\beta}_2+k_{33}\boldsymbol{\beta}_3$,

即 $A=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{21}&k_{31}\\k_{12}&k_{22}&k_{32}\\k_{13}&k_{23}&k_{33}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)K=BK,A^T=K^T\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^T\\\boldsymbol{\beta}_2^T\\\boldsymbol{\beta}_3^T\end{pmatrix}=K^TB$,

若 $B^TX_0=\mathbf{0}$,从而 $A^TX_0=K^TBX_0=\mathbf{0}$,

即 $B^TX=\mathbf{0}$ 的解均为 $A^TX=\mathbf{0}$ 的解,应选(D).

(10)**【答案】** (C).

【解】 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$,(A) 不对;

$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$,(B) 不对;

$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

应选(C).

二、填空题

(11)【答案】 $\frac{1}{\ln 3}$.

【解】 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}3^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$$=\int_0^{+\infty}3^{-t}\mathrm{d}t=-\frac{3^{-t}}{\ln 3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\ln 3}.$$

(12)【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{4t\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=2t$,

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(2t)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2}{2\mathrm{e}^t+1}$,则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=\frac{2}{3}$.

(13)【答案】 1.

【解】 当 $x=0,y=2$ 时,$z=1$,

$(x+1)z+y\ln z-\arctan 2xy=1$ 两边对 x 求偏导得

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2y}{1+4x^2y^2}=0,$$

将 $x=0,y=2,z=1$ 代入得$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}=1$.

(14)【答案】 $\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}$.

【解】 改变积分次序得

$$f(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x=-\int_1^t y\cos\frac{x}{y}\Big|_1^{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^t\left(y\cos\frac{1}{y}-y\cos y\right)\mathrm{d}y,$$

$$f'(t)=t\cos\frac{1}{t}-t\cos t,\text{则 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}.$$

方法点评:直角坐标法计算二重积分时,若累次积分中表达式为如下形式时需要改变积分次序:

(1)$x^{2n}\mathrm{e}^{\pm x^2}\mathrm{d}x$;

(2)$\mathrm{e}^{\frac{k}{x}}\mathrm{d}x$;

(3)$\sin\frac{k}{x}\mathrm{d}x$ 或 $\cos\frac{k}{x}\mathrm{d}x$.

(15)【答案】 $y=C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数).

【解】 微分方程的特征方程为 $\lambda^3-1=0$,特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

则方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数).

(16)【答案】 -5.

【解】
$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & -3 \\ 2 & 1 & x & -3 \\ 2 & -1 & 1 & x-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-x & -x & 2 & -3 \\ 1 & 1-x^2 & x & -3 \\ 3 & -1-x & 1 & x-4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-x & -x & -3 \\ 1 & 1-x^2 & -3 \\ 3 & -1-x & x-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ x^2 & 1-x^2 & 3x^2-3 \\ 4+x & -1-x & 4x+8 \end{vmatrix}$$

$$=(1-x^2)(4x+8)+(1+x)(3x^2-3)+x[x^2(4x+8)-(x+4)(3x^2-3)],$$

整理得 x^3 项的系数为 -5.

三、解答题

(17)【解】 **方法一**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x}{x^2}+\frac{\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin x-e^x+1+x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin x-e^x+1+x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

方法二

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}+\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right),$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}}{e^x}=1$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(-\sin x-e^x)=-\frac{1}{2}$$ 得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

方法三

由泰勒公式得 $e^{t^2}=1+t^2+o(t^2)$，

从而$\int_0^x e^{t^2}dt=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，于是有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{2x}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$

(18)【解】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{1+x}, & x<0 \text{ 且 } x\neq -1,\\ \dfrac{x^2}{1+x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

当 $x<0$ 且 $x\neq -1$ 时，$f'(x)=-\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$，$f''(x)=-\frac{2}{(1+x)^3}$；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$，$f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$，

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f''(x)>0$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f''(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，

故 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,+\infty)$ 为曲线的凹区间，$(-1,0)$ 为曲线的凸区间.

因为 $\lim_{x\to -1}f(x)=\infty$，所以 $x=-1$ 为曲线的铅直渐近线；

由 $\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$，$\lim_{x\to -\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{x^2}{1+x}+x\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{1+x}=1$ 得 $y=-x+1$ 为曲线的一条斜渐近线；

由 $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=1$，$\lim_{x\to +\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{1+x}=-1$ 得 $y=x-1$ 为曲线的另一条斜渐近线.

(19)【解】 $\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+C$ 两边对 x 求导得 $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{x}{3}-1$，

从而 $f(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$.

$$s=\int_4^9\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\int_4^9\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9+2\sqrt{x}\Big|_4^9\right)=\frac{22}{3}.$$

$$A=2\pi\int_4^9 f(x)\,ds=2\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$=\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)dx=\frac{425}{9}\pi.$$

(20)**【解】** (Ⅰ)由 $xy'-6y=-6$ 得 $y'-\frac{6}{x}y=-\frac{6}{x}$,解得

$$y=\left[\int\left(-\frac{6}{x}\right)e^{\int-\frac{6}{x}dx}dx+C\right]e^{-\int-\frac{6}{x}dx}=Cx^6+1,$$

由 $y(\sqrt{3})=10$ 得 $C=\frac{1}{3}$,故 $y=\frac{1}{3}x^6+1$.

(Ⅱ)设 $P(x,y)$ 为曲线 $y=\frac{1}{3}x^6+1$ 上的一点,则法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{2x^5}(X-x),$$

取 $X=0$ 得法线在 y 轴上的截距为 $I_P=\frac{1}{2x^4}+y=\frac{1}{3}x^6+1+\frac{1}{2x^4}$,

由 $\frac{d}{dx}I_P=2x^5-2x^{-5}=2x^5\left(1-\frac{1}{x^{10}}\right)=0$ 得 $x=1$($x=-1$ 舍去),

当 $0<x<1$ 时,$\frac{d}{dx}I_P<0$,当 $x>1$ 时,$\frac{d}{dx}I_P>0$,

故 I_P 在 $x=1$ 时有极小值,此时 P 点的坐标为 $\left(1,\frac{4}{3}\right)$,$I_P=\frac{11}{6}$.

(21)**【解】** 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\sqrt{\cos 2\theta}\right)$,则

$$\iint_D xy\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r^3\sin\theta\cos\theta\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r^3\,dr=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\,d(\cos 2\theta)=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\cos^3 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}.$$

(22)**【解】**

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda^2-4\lambda+3)(\lambda-b)=0$ 得

特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=b$.

情形一:$b=1$

因为 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,所以 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,

而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&a-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,故 $a=1$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

由 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

情形二:$b=3$

因为 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,所以 $r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,

而 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-a-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,故 $a=-1$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

由 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.