2019 年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 方法一

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$得$x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3(x\to 0)$,

故$x-\tan x$为 3 阶无穷小量,即$k=3$,应选(C).

方法二

由$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$得$x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3(x\to 0)$,

故$k=3$,应选(C).

(2)【答案】 (B).

【解】 $y'=x\cos x-\sin x, y''=-x\sin x$,

令$y''=-x\sin x=0$得$x=0, x=\pi$,

当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$时,$y''<0$,当$x\in(0,\pi)$时,$y''<0$,则$(0,2)$不是拐点;

当$x\in(\pi,2\pi)$时,$y''>0$,故$(\pi,-2)$为拐点,应选(B).

(3)【答案】 (D).

【解】 方法一

由$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(2)=1$得$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛;

由$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{2}$得$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$收敛;

由$\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi^2}{8}$得$\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛,

故$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散,应选(D).

方法二

由$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{x}{1+x^2}=1$且$\alpha=1\leqslant 1$得广义积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散,应选(D).

(4)【答案】 (D).

【解】 微分方程$y''+ay'+by=0$的特征方程为$\lambda^2+a\lambda+b=0$,

由$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$为微分方程的通解可知,

特征根为$\lambda_1=\lambda_2=-1$,则$a=2, b=1$;

再由$y^*=\mathrm{e}^x$为微分方程$y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$的特解得$c=4$,应选(D).

(5)【答案】 (A).

【解】 由$t\geqslant 0$时,$\sin t\leqslant t$得$\sin\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$,从而$I_2<I_1$;

又$1-\cos\sqrt{x^2+y^2}=2\sin^2\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=2\sin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

$\sin\sqrt{x^2+y^2}=2\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

由 $x^2+y^2\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ 得 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,从而 $\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\leqslant\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

于是 $\sin\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 1-\cos\sqrt{x^2+y^2}$,故 $I_3<I_2$,应选(A).

(6)**【答案】** (A).

【解】 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$,得 $f(a)=g(a)$;

由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 得 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=0$,从而 $f'(a)=g'(a)$;

由 $0=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{x-a}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a}\right]=\frac{1}{2}[f''(a)-g''(a)]$

得 $f''(a)=g''(a)$,

即由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 可得 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 处相切且曲率相等;

反之,若 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a),|f''(a)|=|g''(a)|$,则不能保证 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$,

故 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应点处相切且曲率相等的充分不必要条件,应选(A).

(7)**【答案】** (A).

【解】 因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含 2 个解向量,所以 $r(\boldsymbol{A})=2<4$,

故 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$,应选(A).

(8)**【答案】** (C).

【解】 令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,

由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 得 $(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(\lambda^2+\lambda-2)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

从而有 $\lambda^2+\lambda-2=0$,即 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$,

因为 $|\boldsymbol{A}|=4$,所以 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$,

故二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$,应选(C).

二、填空题

(9)**【答案】** $4\mathrm{e}^2$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x+2^x-1)^{\frac{1}{x+2^x-1}}\right]^{\frac{2(x+2^x-1)}{x}}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x-1}{x}\right)}$

$=\mathrm{e}^{2(1+\ln 2)}=\mathrm{e}^{\ln 4\mathrm{e}^2}=4\mathrm{e}^2$.

(10)**【答案】** $\frac{3\pi}{2}+2$.

【解】 $t=\frac{3\pi}{2}$ 对应曲线上的点为 $\left(\frac{3\pi}{2}+1,1\right)$,

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$,斜率为 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=-1$,

切线方程为

$$y-1=-\left(x-\frac{3\pi}{2}-1\right),$$

令 $x=0$ 得切线在 y 轴上的截距为 $y=\frac{3\pi}{2}+2$.

(11)**【答案】** $yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{2y^2}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$，

则 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y^3}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)+yf\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{2y^3}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)=yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

(12)**【答案】** $\frac{1}{2}\ln 3$.

【解】 曲线段的长度为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,dx$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

(13)**【答案】** $\frac{\cos 1-1}{4}$.

【解】 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt\right)d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\left(\frac{x^2}{2}\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{\sin x^2}{x}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2dx=-\frac{1}{4}\int_0^1\sin x^2d(x^2)=\frac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{\cos 1-1}{4}.$$

(14)**【答案】** -4.

【解】

$$A_{11}-A_{12}=1\times A_{11}-1\times A_{12}+0A_{13}+0A_{14}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-2&-1&-1&1\\3&1&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&3&4\end{vmatrix}=-4.$$

三、解答题

(15)**【解】** 当 $x>0$ 时，$f'(x)=(x^{2x})'=(e^{2x\ln x})'=x^{2x}\cdot(2\ln x+2)$；

当 $x<0$ 时，$f'(x)=(x+1)e^x$，

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}2\ln x=-\infty$ 得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，

于是有

$$f'(x)=\begin{cases}x^{2x}(2\ln x+2), & x>0,\\(x+1)e^x, & x<0.\end{cases}$$

$f'(x)=0$ 或 $f(x)$ 的不可导的点为 $x=-1,x=0,x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)>0$，

故 $x=-1$ 为极小值点，极小值为 $f(-1)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；

$x=0$ 为极大值点，极大值为 $f(0)=1$；

$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 为极小值点，极小值为 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.

(16)【解】 令 $\dfrac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$，

由 $A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2=3x+6$ 得

$$\begin{cases}A+C=0,\\B-2C+D=0,\\B+C-2D=3,\\-A+B+D=6,\end{cases}$$

解得 $A=-2,B=3,C=2,D=1$，故

$$\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C.$$

(17)【解】 (Ⅰ) $y=\left(\displaystyle\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\int -x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int -x\,\mathrm{d}x}=(\sqrt{x}+C)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，

由 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 得 $C=0$，即 $y(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

(Ⅱ) $V=\displaystyle\int_1^2\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})$.

(18)【解】 由对称性得

$$\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}\left(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\sin^2\theta\right)$，则

$$\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin^2\theta}r\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1-\cos^2\theta)^2\mathrm{d}(\cos\theta)\xlongequal{\cos\theta=t}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-t^2)^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-t^2)^2\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{43}{120}\sqrt{2}.$$

(19)【解】 $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}[e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}(-1)^k]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}]=\frac{1}{2}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi}-e^{-n\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2e^{-\pi}(1-e^{-n\pi})}{1-e^{-\pi}}-e^{-n\pi}\right];$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1+\frac{2e^{-\pi}(1-e^{-n\pi})}{1-e^{-\pi}}-e^{-n\pi}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$.

(20)【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+ave^{ax+by}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+bve^{ax+by}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+2a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+a^2ve^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+2b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+b^2ve^{ax+by},$$

代入已知等式得

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+4a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+2a^2ve^{ax+by}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}-4b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}-2b^2ve^{ax+by}+$$

$$3\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+3ave^{ax+by}+3\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+3bve^{ax+by}=0,$$

整理得

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(4a+3)\frac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial v}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3a+3b)v=0,$$

由题意得$\begin{cases}4a+3=0,\\3-4b=0,\end{cases}$解得 $a=-\frac{3}{4},b=\frac{3}{4}$.

(21)【证明】 (Ⅰ)令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,则 $F'(x)=f(x)$,

由拉格朗日中值定理得

$$1=\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=F'(c)(1-0)=f(c)(0<c<1),$$

因为 $f(c)=f(1)=1$,所以由罗尔定理,存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$.

(Ⅱ)令 $\varphi(x)=f(x)+x^2$,

$\varphi(0)=0$, $\varphi(c)=f(c)+c^2=1+c^2$, $\varphi(1)=2$,

由拉格朗日中值定理,存在 $\eta_1\in(0,c)$,$\eta_2\in(c,1)$,使得

$$\varphi'(\eta_1)=\frac{\varphi(c)-\varphi(0)}{c}=\frac{1+c^2}{c}=c+\frac{1}{c},$$

$$\varphi'(\eta_2)=\frac{\varphi(1)-\varphi(c)}{1-c}=\frac{2-1-c^2}{1-c}=1+c,$$

再由拉格朗日中值定理,存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$,使得

$$\varphi''(\eta)=\frac{\varphi'(\eta_2)-\varphi'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=\frac{1+c-c-\frac{1}{c}}{\eta_2-\eta_1}=\frac{1-\frac{1}{c}}{\eta_2-\eta_1}<0,$$

而 $\varphi''(x)=f''(x)+2$，即 $f''(\eta)+2<0$，故 $f''(\eta)<-2$.

(22)【解】 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\4&4&a^2+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&a^2-1\end{pmatrix}$，

当 $a=-1$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，

由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\2&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 2，

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&4&2&2&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&0&-2&2&0\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，所以两个向量组不等价；

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&4&4&0&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，
所以两个向量组等价.

令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$，

再由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&4&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 得

方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k+3\\k-2\\k\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数})，$$

故 $\boldsymbol{\beta}_3=(-2k+3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$ 为任意常数）.

当 $a\neq\pm1$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 3，

由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1-a&a^2-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a^2-1\end{pmatrix}$ 得

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 3，

再由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right)\text{得}$$

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，
故两个向量组等价.

令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$，

由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&a^2+3&a^2+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&a^2-1&a^2-1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$得

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(23)**【解】** (Ⅰ)因为$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$,即$x-4=y+1$,或$y=x-5$,

再由$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$得$-2(-2x+4)=-2y$,即$y=-2x+4$,

解得$x=3,y=-2$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&3&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$,

显然矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$,

由$2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{4}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$得$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_1=-2$的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$;

由$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_2=-1$的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$;

由$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_3=2$的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$,

令$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\4&0&0\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$;

由$2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得$\boldsymbol{B}$的属于特征值$\lambda_1=-2$的特征向量为$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

由 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$ 得 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$，

故 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$.