2018 年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (B).

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=1$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right]+ax^2+bx-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2+(1+b)x+o(x^2)}{x^2}=0,$$

则有 $\begin{cases}1+b=0,\\ \frac{1}{2}+a=0,\end{cases}$ 解得 $a=-\frac{1}{2}$,$b=-1$. 应选(B).

(2)**【答案】** (D).

【解】 **方法一**

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{2},$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2},$$

故函数 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 不可导,应选(D).

方法二

若 $f(x)=|x|\sin|x|$,则 $f(x)\sim x^2$,由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ 得 $f'(0)=0$,

即 $f(x)=|x|\sin|x|$ 在 $x=0$ 可导,不选(A);

若 $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$,则 $f(x)\sim|x|^{\frac{3}{2}}$,由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ 得 $f'(0)=0$,

即 $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 可导,不选(B);

若 $f(x)=\cos|x|$,则 $f(x)-f(0)\sim-\frac{1}{2}x^2$,由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ 得 $f'(0)=0$,

即 $f(x)=\cos|x|$ 在 $x=0$ 可导,不选(C),应选(D).

(3)**【答案】** (D).

【解】 由函数表达式易得分段点为 $x=-1$,$x=0$.

在 $x=-1$ 点处,$f(x)$ 为连续函数,故只需考虑 $g(x)$ 的连续性,而

$$\lim_{x\to -1^-}g(x)=g(-1)=2+a,\quad \lim_{x\to -1^+}g(x)=-1,$$

所以 $2+a=-1$,解得 $a=-3$;

在 $x=0$ 点处,有

$$\lim_{x\to0^+}[f(x)+g(x)]=f(0)+g(0)=1-b,\quad \lim_{x\to0^-}[f(x)+g(x)]=-1+0=-1,$$

从而 $1-b=-1$，得 $b=2$. 应选(D).

(4)**【答案】** (D).

【解】 考虑 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的泰勒公式：

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(\text{其中 }\xi\text{ 在 }x\text{ 与}\frac{1}{2}\text{ 之间}).$$

对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上积分得

$$\begin{aligned}0&=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以，当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x<0$. 应选(D).

(5)**【答案】** (C).

【解】 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi$,

$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$1+\sqrt{\cos x}>1>\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}$,

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，即 $K>M>N$. 应选(C).

(6)**【答案】** (C).

【解】 积分区域 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 2-x^2\}$ 关于 y 轴对称，被积函数中 xy 为 x 的奇函数. 于是

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y\\&=\iint_D(1-xy)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1(2-x^2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

应选(C).

(7)**【答案】** (A).

【解】 令$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

显然矩阵 $\boldsymbol{M}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 的特征值都是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,

$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{M})=2$，因为 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=1$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})=1$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=1$,

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{M}$ 相似，应选(A).

(8)【答案】 (A).

【解】 因为$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$为行满秩矩阵,故$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}))=r(\boldsymbol{A})$,应选(A).

二、填空题

(9)【答案】 1.

【解】 记$f(t)=\arctan t$.当$x>0$时,$f(t)$在区间$[x,x+1]$上满足拉格朗日中值定理条件,故

$$\arctan(x+1)-\arctan x=\frac{1}{1+\xi^2}(x+1-x)\quad(x<\xi<x+1).$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\xi^2}$.

又$\dfrac{x^2}{1+(1+x)^2}<\dfrac{x^2}{1+\xi^2}<\dfrac{x^2}{1+x^2}$,故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\xi^2}=1$.

(10)【答案】 $y=4x-3$.

【解】 $y'=2x+\dfrac{2}{x},\quad y''=2-\dfrac{2}{x^2}(x>0)$.

由$y''=2-\dfrac{2}{x^2}=0$得拐点为$(1,1)$.

又所求切线的斜率为$y'=\left(2x+\dfrac{2}{x}\right)\Big|_{x=1}=4$,故切线方程为$y=4x-3$.

(11)【答案】 $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

【解】 $$\begin{aligned}\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x&=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_5^{+\infty}\\&=\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

(12)【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

【解】 由 $$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3\sin^2t\cos t}{-3\cos^2t\sin t}=-\tan t,$$

$$y''=(-\tan t)'_t\cdot\frac{1}{-3\cos^2t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4t\sin t},$$

得$y'|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1,\quad y''|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$.

故所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}.$$

(13)【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解】 在方程两边对 x 求偏导数,得

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{e}^{z-1}\frac{\partial z}{\partial x}=y,\text{即}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{1+z\mathrm{e}^{z-1}}.$$

又当 $x=2,y=\frac{1}{2}$ 时,$z=1$,代入上式得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

(14)【答案】 2.

【解】 由分块矩阵的乘法以及题设条件得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,知 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 于是

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$ 相似.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+3)=0$,

得 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值为 2,由相似矩阵有相同的特征值,知 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 2.

三、解答题

(15)【解】

$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x\right)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{2}{3}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+C\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}(\mathrm{e}^x+2)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.\end{aligned}$$

(16)【解】 (Ⅰ) 令 $x-t=u$,则 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$.

由题设条件知

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=ax^2.$$

在上式两端对 x 求导得

$$f(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=2ax,$$

所以 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0$. 于是,在上式两端再对 x 求导得

$$f'(x)+f(x)=2a.$$

解此一阶线性非齐次方程，得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left(C+\int 2a\,\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{-x}(C+2a\,\mathrm{e}^{x})=C\mathrm{e}^{-x}+2a.$$

由 $f(0)=0$，得 $C=-2a$，从而 $f(x)=2a(1-\mathrm{e}^{-x})$.

（Ⅱ）由题设知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，即 $\int_0^1 (2a-2a\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=1$，故 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

(17)【解】 设积分区域 D 为：$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2\pi, 0\leqslant y\leqslant g(x)\}$，则

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{g(x)}(x+2y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}[xg(x)+g^2(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2](1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t)\mathrm{d}t+5\pi=3\pi^2+5\pi.\end{aligned}$$

(18)【证明】 由题设知 $x>0$.

设 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$.

于是只需证明：当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f(x)>0$.

$$f'(x)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}=\frac{1}{x}(x-2\ln x+2k).$$

设 $g(x)=x-2\ln x+2k$，则 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=2$ 为 $g(x)$ 的唯一驻点.

又 $g''(x)=\dfrac{2}{x^2}>0$，故 $x=2$ 为 $g(x)$ 的唯一极小值点，从而 $g(2)$ 为 $g(x)$ 的最小值.

因为 $k\geqslant \ln 2-1$，所以 $g(2)=2-2\ln 2+2k\geqslant 0$，从而 $g(x)>0(x\neq 2)$.

综上可知 $f'(x)>0(x\neq 2)$，所以 $f(x)$ 单调增加.

又 $f(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，不等式得证.

(19)【解】 设铁丝分成的三段长分别是 x,y,z，则 $x+y+z=2$，且依次围成的圆、正方形与正三角形三个图形的面积之和为

$$f(x,y,z)=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2,$$

构造拉格朗日函数：$L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$.

令 $\begin{cases}L'_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0,\\ L'_y=\dfrac{y}{8}+\lambda=0,\\ L'_z=\dfrac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0,\\ L'_\lambda=x+y+z-2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}},\\ y_0=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}},\\ z_0=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}},\end{cases}$ 此时 $f(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

又当 $x+y+z=2, xyz=0$ 时，$f(x,y,z)$ 的最小值为 $f\left(0,\dfrac{8}{4+3\sqrt{3}},\dfrac{6\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{4+3\sqrt{3}}$.

所以三个图形的面积之和存在最小值，最小值为 $f(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

(20)**【解】** 设 P 点坐标为 (m,n)，则 $n=\dfrac{4}{9}m^2$，直线 AP 的方程为

$$y=\left(\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right)x+1.$$

直线 OA 与直线 AP 以及曲线 L 所围图形的面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_0^m\left[\left(\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right)x+1-\frac{4}{9}x^2\right]\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{4}{9}m-\frac{1}{m}\right)\frac{m^2}{2}+m-\frac{4}{27}m^3\\&=\frac{2}{27}m^3+\frac{1}{2}m.\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{2}{9}m^2+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$.

由已知，当 $m=3$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=4$. 故当 P 运动到点 $(3,4)$ 时，S 对时间 t 的变化率为 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=10$.

(21)**【证明】** 因为 $x_1\neq 0$，所以 $\mathrm{e}^{x_2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}$. 由微分中值定理，存在 $\xi\in(0,x_1)$，使得

$\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}=\mathrm{e}^{\xi}$，即 $\mathrm{e}^{x_2}=\mathrm{e}^{\xi}$，因此 $0<x_2<x_1$.

假设 $0<x_{n+1}<x_n$，则 $\mathrm{e}^{x_{n+2}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_{n+1}}-1}{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{\eta}(0<\eta<x_{n+1})$，即 $0<x_{n+2}<x_{n+1}$.

故 $\{x_n\}$ 是单调减少的数列，且有下界，从而 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在等式 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 两边取极限，得 $a\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a-1$，显然 $a=0$ 为其解.

又令 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$，则 $f'(x)=x\mathrm{e}^x$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=x\mathrm{e}^x>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，所以 $a=0$ 是方程 $a\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上的唯一解，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(22)**【解】** (Ⅰ) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2=0$ 的充分必要条件是

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\\x_1+ax_3=0.\end{cases}$$

对齐次线性方程组的系数矩阵作初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

当 $a\neq 2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 只有零解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,

当 $a=2$ 时，$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 有非零解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

(Ⅱ) 当 $a\neq 2$ 时，令 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

因 $\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{vmatrix}=a-2\neq 0$，则矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}$ 可逆，

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当 $a=2$ 时，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2\\&=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3\\&=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+3x_2x_3\\&=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2,\end{aligned}$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2$.

(23)**【解】** (Ⅰ) 显然 $r(\boldsymbol{A})=2$，因为初等变换不改变矩阵的秩，所以 $r(\boldsymbol{B})=2$，

而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix}$，故 $a=2$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&0\\2&7&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$，

由 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$ 得

$$\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{pmatrix},$$

所求的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2,k_3$ 为任意常数且 $k_2\neq k_3)$.