2017 年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (A).

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}$,

$f(0)=f(0-0)=b$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(0+0)=f(0)=f(0-0)$,从而 $ab=\dfrac{1}{2}$,应选(A).

(2)【答案】 (B).

【解】 **方法一** 取 $f(x)=2x^2-1$,显然 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)=4>0$,但$\int_{-1}^{1}f(x)<0$,应选(B).

方法二 令 $A(-1,1), B(0,-1), C(1,1)$,

设 $y=g(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 为连接 AB, BC 的折线段,

因为 $f''(x)>0$,所以 $y=f(x)$ 在$[-1,1]$上是凹的,

从而$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x$,

而$\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}g(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}g(x)\mathrm{d}x=0$,故$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$,应选(B).

(3)【答案】 (D).

【解】 令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=A+\sin A=0$ 得 $A=0$,应选(D).

(4)【答案】 (C).

【解】 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+8=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=2\pm 2\mathrm{i}$.

方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}$ 的特解形式为 $y_1=A\mathrm{e}^{2x}$;

方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}\cos 2x$ 的特解形式为 $y_2=x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$,

故方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解形式为

$$y^*=A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x),$$

应选(C).

(5)【答案】 (D).

【解】 由$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$ 得 $f(x,y)$ 关于 x 为增函数,从而 $f(1,y)>f(0,y)$;

由$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 得 $f(x,y)$ 关于 y 为减函数,从而 $f(x,0)>f(x,1)$,

由 $f(1,y)>f(0,y)$ 得 $f(1,0)>f(0,0)$;

由 $f(x,0)>f(x,1)$ 得 $f(0,0)>f(0,1)$,故 $f(1,0)>f(0,1)$,应选(D).

(6)【答案】 (C).

【解】 从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 的时间段上,甲、乙分别走过的距离为

$$S_1=\int_{0}^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t,\quad S_2=\int_{0}^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t,$$

在 $t=t_0$ 时，$S_2=S_1+10$，即$\int_0^{t_0} v_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{t_0} v_1(t)\mathrm{d}t+10$，

或$\int_0^{t_0}[v_2(t)-v_1(t)]\mathrm{d}t=10$，故 $t_0=25$，应选(C).

(7)**【答案】** (B).

【解】 由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，

应选(B).

(8)**【答案】** (B).

【解】 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$，则 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，

从而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 都不相似，应选(B).

方法点评：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同，则

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可相似对角化，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中一个可相似对角化，一个不可相似对角化，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似.

二、填空题

(9)**【答案】** $y=x+2$.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1$，

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2，$$

则斜渐近线方程为 $y=x+2$.

(10)**【答案】** $-\dfrac{1}{8}$.

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\dfrac{-\sin t(1+e^t)-e^t\cos t}{(1+e^t)^2}}{1+e^t}=-\frac{(1+e^t)\sin t+e^t\cos t}{(1+e^t)^3},$$

则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

(11)**【答案】** 1.

【解】 $$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\left.\frac{\ln(1+x)}{x+1}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=-\left.\frac{1}{x+1}\right|_0^{+\infty}=1.$$

(12)**【答案】** xye^y.

【解】 **方法一** 由 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy=d(xye^y)$,得 $f(x,y)=xye^y+C$,再由 $f(0,0)=0$,得 $C=0$,故 $f(x,y)=xye^y$.

方法二 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)e^y$,

由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^y$ 得 $f(x,y)=\int ye^ydx=xye^y+C$,

再由 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$,故 $f(x,y)=xye^y$.

(13)**【答案】** $-\ln\cos 1$.

【解】 $$\int_0^1dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx=\int_0^1\frac{\tan x}{x}dx\int_0^x dy$$

$$=\int_0^1\tan x\,dx=-\ln\cos x\Big|_0^1=-\ln\cos 1.$$

(14)**【答案】** -1.

【解】 由特征值与特征向量的定义得 $\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,

即 $\begin{cases}1=\lambda,\\3+2a=\lambda,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

三、解答题

(15)**【解】** $$\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^tdt\xlongequal{x-t=u}\int_0^x\sqrt{u}\,e^{x-u}du=e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du,$$

则 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^tdt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}e^x\cdot\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.$$

(16)【解】 $\dfrac{dy}{dx}=e^x f'_1-\sin x\cdot f'_2$， $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'_1(1,1)$；

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^x f'_1+e^x(e^x f''_{11}-\sin x\cdot f''_{12})-\cos x\cdot f'_2-\sin x(e^x f''_{21}-\sin x\cdot f''_{22})$，

则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)-f'_2(1,1)$.

(17)【解】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)d(x^2)\\&=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1)+1}{1+x}dx\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

方法点评：本题考查定积分的定义求极限.

n 项和求极限一般分为两种类型：

(1) 分子次数齐、分母次数齐，且分母的次数高于分子一次，采用定积分定义求极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

(2) 若分子次数或分母次数不齐，一般使用夹逼定理.

(18)【解】 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两边对 x 求导，得 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$，

令 $y'=0$ 得 $x_1=-1,x_2=1$，对应的函数值为 $y_1=0,y_2=1$；

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ 两边再对 x 求导，得 $6x+6yy'^2+3y^2y''+3y''=0$，

由 $y''(-1)=2>0$ 得 $x=-1$ 为极小值点，极小值为 $y=0$；

由 $y''(1)=-1<0$ 得 $x=1$ 为极大值点，极大值为 $y=1$.

(19)【证明】 (Ⅰ) 根据极限保号性，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，所以存在 $\delta>0$，

当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}<0$，即当 $x\in(0,\delta)$ 时 $f(x)<0$，

于是存在 $c\in(0,\delta)$，使得 $f(c)<0$，

因为 $f(c)f(1)<0$，所以存在 $x_0\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $f(x_0)=0$.

(Ⅱ) 令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $F'(x)=f(x)f''(x)+f'^2(x)$，

由 $f(0)=f(x_0)=0$，得存在 $x\in(0,x_0)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，

因 $f(0)=f(x_0)=0$，所以 $F(0)=F(\xi_1)=F(x_0)$，

由罗尔定理，存在 $\eta_1\in(0,\xi_1)$，$\eta_2\in(\xi_1,x_0)$，使 $F'(\eta_1)=0$，$F'(\eta_2)=0$，

即方程 $f(x)f''(x)+f'^2(x)=0$ 在$(0,1)$内至少有两个不同的实根.

(20)【解】 由对称性与奇偶性得$\iint\limits_D (x+1)^2 d\sigma = \iint\limits_D (x^2+1) d\sigma = \iint\limits_D x^2 d\sigma + \iint\limits_D d\sigma$，

显然$\iint\limits_D d\sigma = \pi$.

令$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta)$，则

$$\iint\limits_D x^2 d\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3 \cos^2\theta \, dr = \int_0^{\pi} 4\cos^2\theta \sin^4\theta \, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^4\theta \, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\sin^4\theta \, d\theta = 8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \, d\theta\right)$$

$$= 8\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

故$\iint\limits_D (x+1)^2 d\sigma = \frac{5\pi}{4}$.

(21)【解】 曲线 L 在点(x,y)处的切线为 $Y - y = y'(X - x)$，由 $X = 0$ 得 $Y_P = y - xy'$；

曲线 L 在点(x,y)处的法线为 $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$，由 $Y = 0$ 得 $X_P = x + yy'$.

由 $X_P = Y_P$ 得 $y - xy' = x + yy'$，整理得$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$，即$\frac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$.

令$\frac{y}{x} = u$，则 $u + x\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1}$，整理得 $x\frac{du}{dx} = -\frac{1+u^2}{u+1}$，

分离变量得$\frac{u+1}{1+u^2}du = -\frac{dx}{x}$，

积分得$\frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \arctan u = -\ln x + C$，

由 $y(1) = 0$ 得 $C = 0$，

故(x,y)满足的方程为$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + \arctan\frac{y}{x} = -\ln x$.

(22)(Ⅰ)【证明】 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，

因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

因为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 两两不同，所以 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$.

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，从而 $r(\boldsymbol{A}) < 3$，于是 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

(Ⅱ)【解】 因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，所以 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量，

由$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta} \end{cases}$得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{X} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (k 为任意常数).

(23)【解】 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $f(x_1,x_2,x_3)=X^{T}AX$,

因为 $\lambda_3=0$,所以 $|A|=0$.

由 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=-3(a-2)=0$,得 $a=2$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$ 得

$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

由 $-3E-A\to\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=-3$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

由 $6E-A=\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_2=6$ 对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

由 $0E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

规范化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,

故正交矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$.

$f(x_1,x_2,x_3)=X^{T}AX\xlongequal{X=QY}-3y_1^2+6y_2^2$.