2016 年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (B).

【解】 因为 $\alpha_1 \sim x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2$， $\alpha_2 \sim \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}}$， $\alpha_3 \sim \frac{1}{3}x$，

所以以上三个无穷小量从低阶到高阶的次序为 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$，应选(B).

(2)【答案】 (D).

【解】 $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} (x-1)^2 + C, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + C + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

取 $C=0$ 得 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$ 应选(D).

(3)【答案】 (B).

【解】 因为 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0} = -(0-1) = 1$，

$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty} = +\infty$，

所以 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 发散，应选(B).

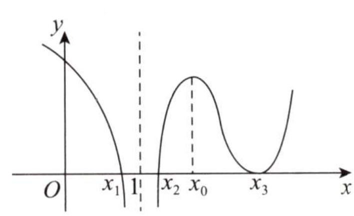
(4)【答案】 (B).

【解】 如图所示，$f'(x)$ 的零点从左到右依次为 $x_1(<1), x_2, x_3$.

由 $\begin{cases} f'(x) > 0, & x < x_1, \\ f'(x) < 0, & x_1 < x < 1 \end{cases}$ 得 $x = x_1$ 为 $f(x)$ 的极大值点；

由 $\begin{cases} f'(x) < 0, & x_1 < x < 1, \\ f'(x) < 0, & 1 < x < x_2 \end{cases}$ 得 $x = 1$ 不是 $f(x)$ 的极值点；

由 $\begin{cases} f'(x) < 0, & 1 < x < x_2, \\ f'(x) > 0, & x_2 < x < x_3 \end{cases}$ 得 $x = x_2$ 为 $f(x)$ 的极小值点；



一(4) 题图

由 $\begin{cases} f'(x) > 0, & x_2 < x < x_3, \\ f'(x) > 0, & x > x_3 \end{cases}$ 得 $x = x_3$ 不是 $f(x)$ 的极值点，

故 $f(x)$ 有两个极值点.

$f''(x)$ 在 $x=1$ 处不存在，又 $f'(x)$ 切线水平对应的点为 x_0 及 x_3，

即 $f''(x_0) = 0, f''(x_3) = 0$.

由 $\begin{cases} f''(x) < 0, & x < 1, \\ f''(x) > 0, & 1 < x < x_0 \end{cases}$ 得 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点；

由 $\begin{cases} f''(x) > 0, & 1 < x < x_0, \\ f''(x) < 0, & x_0 < x < x_3 \end{cases}$ 得 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点；

由 $\begin{cases} f''(x) < 0, & x_0 < x < x_3, \\ f''(x) > 0, & x > x_3 \end{cases}$ 得 $(x_3, f(x_3))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点，

即 $y = f(x)$ 有三个拐点，应选(B).

(5)**【答案】** (A).

【解】 $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)=g'(x_0)$,

由 $\dfrac{-f_1''(x_0)}{[1+f_1'(x_0)^2]^{\frac{3}{2}}}>\dfrac{-f_2''(x_0)}{[1+f_2'(x_0)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 得 $f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0=g''(x_0)$,

存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\begin{cases}f_1'(x)>f_2'(x)>g'(x), & x\in(x_0-\delta,x_0),\\ f_1'(x)<f_2'(x)<g'(x), & x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$$

再由 $f_1(x_0)=f_2(x_0)=g(x_0)$,得在 x_0 的邻域内有 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$,从而 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$,应选(A).

(6)**【答案】** (D).

【解】 $f_x'=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x(x-y-1)}{(x-y)^2}$,

$$f_y'=-\frac{e^x}{(x-y)^2}\cdot(-1)=\frac{e^x}{(x-y)^2},$$

则 $f_x'+f_y'=\dfrac{e^x(x-y-1)}{(x-y)^2}+\dfrac{e^x}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x}{x-y}=f$,应选(D).

(7)**【答案】** (C).

【解】 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似可知,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

对 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 两边取转置得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,或$[(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}]=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似,(A) 正确;

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(B) 正确;

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$,得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$,

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(D) 正确,应选(C).

(8)**【答案】** (C).

【解】 **方法一** 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$,

$$由\ |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-a+1&0\\0&0&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0,$$

得 $\lambda_1=a+2,\lambda_2=\lambda_3=a-1$.

因为正、负惯性指数分别为 1,2,所以 $\begin{cases}a+2>0,\\a-1<0,\end{cases}$ 解得 $-2<a<1$,应选(C).

方法二 取 $a=0$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$ 得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，此时二次型的正惯性指数为1，负惯性指数为2，满足题设的条件，故 $a=0$ 时成立，应选(C).

二、填空题

(9)**【答案】** $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{1+x^2}-x+\arctan(1+x^2)\right]=\dfrac{\pi}{2}$，

得 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

(10)**【答案】** $\sin 1-\cos 1$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x\,dx=-\int_0^1 x\,d(\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx$$

$=-\cos 1+\sin 1=\sin 1-\cos 1$.

(11)**【答案】** $y'-y=2x-x^2$.

【解】 **方法一** 设所求方程为 $y'+p(x)y=q(x)$，

将 $y_1=x^2-e^x,y_2=x^2$ 代入所设方程得

$$\begin{cases}2x-e^x+(x^2-e^x)p(x)=q(x),\\ 2x+x^2p(x)=q(x).\end{cases}$$

解得 $p(x)=-1,q(x)=2x-x^2$，故所求的微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

方法二 设所求的微分方程为 $y'+p(x)y=q(x)$.

令 $y_1=x^2-e^x,y_2=x^2$，

由线性微分方程解的结构得 $y_2-y_1=e^x$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解，代入得 $p(x)=-1$，

将 $y_2=x^2$ 代入 $y'-y=q(x)$ 得 $q(x)=2x-x^2$，

故所求的微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

(12)**【答案】** $5\cdot 2^{n-1}$.

【解】 **方法一**

由 $f'(x)=2(x+1)+2f(x)=2[x+f(x)]+2$ 得 $f(0)=1,f'(0)=4$，

由 $f''(x)=2[1+f'(x)]$，得 $f''(0)=2\cdot 5$，

由 $f'''(x)=2f''(x)$，得 $f'''(0)=2^2\cdot 5$，

依次类推，由 $f^{(n)}(x)=2f^{(n-1)}(x)$，得 $f^{(n)}(0)=5\cdot 2^{n-1}$.

方法二 由 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$，得 $f'(x)-2f(x)=2(x+1)$，解得

$$f(x)=\left[\int 2(x+1)e^{\int -2dx}dx+C\right]e^{-\int -2dx}=Ce^{2x}-x-\frac{3}{2},$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=\dfrac{5}{2}$，故 $f(x)=\dfrac{5}{2}e^{2x}-x-\dfrac{3}{2}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$f^{(n)}(x)=5\cdot 2^{n-1}e^{2x}$，故 $f^{(n)}(0)=5\cdot 2^{n-1}$.

(13)【答案】 $2\sqrt{2}v_0$.

【解】 设 t 时刻 P 点的坐标为 $(x(t),y(t))$, $l=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}$,

由题意得 $\frac{dx}{dt}=v_0$,

$$\frac{dl}{dt}=\frac{2x(t)+6x^5(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}}\cdot\frac{dx}{dt},$$

取 $x(t)=1$, $\frac{dx}{dt}=v_0$, 则 $\frac{dl}{dt}=\frac{8}{2\sqrt{2}}\cdot v_0=2\sqrt{2}v_0$.

(14)【答案】 2.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$,

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,

由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $r(\boldsymbol{B})=2$, 从而 $r(\boldsymbol{A})=2$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=(a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{vmatrix}=(a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a+1&0\\0&0&a+1\end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$,

得 $a=2$ 或 $a=-1$,

而当 $a=-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=1$, $a=-1$ 舍去,故 $a=2$.

三、解答题

(15)【解】 **方法一** $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$,

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos 2x+2x\sin x-1)]}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{x}-\frac{1}{4}\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{12}\right)=\frac{1}{3}$,

故 $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$.

方法二 $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{[1+(\cos 2x+2x\sin x-1)]^{\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x-1}}\right\}^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}},$$

由 $\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$,

$x\sin x = x^2 - \dfrac{x^4}{3!} + o(x^4)$,

得 $\cos 2x + 2x\sin x - 1 \sim \dfrac{1}{3}x^4$,

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x + 2x\sin x - 1}{x^4} = \dfrac{1}{3}$,故 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\frac{1}{3}}$.

(16)**【解】** 当 $0 < x < 1$ 时,

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)\mathrm{d}t + \int_x^1 (t^2 - x^2)\mathrm{d}t = x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1 - x^3}{3} - x^2(1 - x)$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3} - x^2;$$

当 $x \geqslant 1$ 时,$f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2)\mathrm{d}t = x^2 - \dfrac{1}{3}$,

则 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{1}{3} - x^2, & 0 < x < 1, \\ x^2 - \dfrac{1}{3}, & x \geqslant 1. \end{cases}$

当 $0 < x < 1$ 时,$f'(x) = 4x^2 - 2x$;

当 $x > 1$ 时,$f'(x) = 2x$.

由 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{1}{3} - x^2 - \dfrac{2}{3}}{x - 1} = 2$,即 $f'_-(1) = 2$;

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}}{x - 1} = 2$,即 $f'_+(1) = 2$,

得 $f'(1) = 2$,

于是 $f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1, \\ 2x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \dfrac{1}{2}$,

当 $0 < x < \dfrac{1}{2}$ 时,$f'(x) < 0$;当 $x > \dfrac{1}{2}$ 时,$f'(x) > 0$,故 $x = \dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最小值点,

最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

(17)**【解】** $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$$\begin{cases} 2xz + (x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0, \\ 2yz + (x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + 2 = 0, \end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ 得 $x = -\dfrac{1}{z}, y = -\dfrac{1}{z}$,

代入 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 中得

$\ln z-\frac{2}{z}+2=0$,解得 $z=1$,从而 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

上面方程组中的两式分别对 x,y 求偏导得

$$\begin{cases}2z+4x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\2z+4y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\end{cases}$$

将 $x=-1,y=-1,z=1,\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,-1)}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3},$$

由 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$ 得 $z=z(x,y)$ 的极大值为 $z(-1,-1)=1$.

(18)**【解】** 由奇偶性得

$$\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

方法一 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\csc\theta\right)$,则

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^2\theta-2)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\left(-\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\pi\right)=1-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\iint_D\frac{y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=1-4\int_0^1y^2\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\&=1-4\int_0^1\left(y\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^y\right)\mathrm{d}y\\&=1-\pi\int_0^1y\,\mathrm{d}y\\&=1-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(19)**【解】** 将 $y_2=u(x)\mathrm{e}^x$ 代入原方程得

$$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0,\text{或 }u''+\left(1-\frac{2}{2x-1}\right)u'=0,$$

解得 $u'(x)=C_1\mathrm{e}^{-\int\left(1-\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x}=C_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$,

从而 $u(x)=\int C_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+C_2=-C_1(2x+1)\mathrm{e}^{-x}+C_2$，

由 $u(-1)=\mathrm{e}$，$u(0)=-1$ 得 $\begin{cases}C_1\mathrm{e}+C_2=\mathrm{e},\\-C_1+C_2=-1.\end{cases}$

解得 $C_1=1$，$C_2=0$，于是 $u(x)=-(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$，

故原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2(2x+1)$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）.

(20)**【解】** 区域 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi-\pi\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cdot(-3\cos^2 t\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cdot(1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi-3\pi(I_7-I_9)$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{16}{105}\pi=\frac{18}{35}\pi.$$

区域 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的表面积为

$$S=2\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{9\sin^4 t\cos^2 t+9\cos^4 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi+\frac{6\pi}{5}=\frac{16\pi}{5}.$$

(21)(Ⅰ)**【解】** **方法一** 由题意，得 $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t$，

$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为 $\overline{f}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$，

由 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{2}f\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{x\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\frac{3\pi}{2}\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{x\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{(3\pi-2x)\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

故 $\overline{f}=\frac{1}{3\pi}$.

方法二 由题意，得 $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t$，

$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\overline{f}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3\pi}.$$

(Ⅱ)【证明】 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$,

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

再由 $f(0)=0$ 得 $f(x)<0\left(0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,特别地,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$.

由积分中值定理,存在 $c\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$,使得 $f(c)=\overline{f}=\dfrac{1}{3\pi}>0$,显然 $c\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

由零点定理,存在 $\xi\in\left(\dfrac{\pi}{2},c\right)\subset\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$,使得 $f(\xi)=0$.

因为$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$内最多只有一个零点,

故 $f(x)$ 在$\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$内存在唯一的零点.

(22)【解】 (Ⅰ)$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\0&-1&2a-1&1\\0&0&-a^2+2a&a-2\end{array}\right)$.

因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解,所以 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$,
从而 $-a^2+2a=0$,于是 $a=0$ 或 $a=2$.

当 $a=2$ 时,$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

此时 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$,所以 $a=2$ 时,方程组有无数个解,矛盾,故 $a=0$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$,

由$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

得方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

(23)【解】 (Ⅰ)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$,得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

将 $\lambda_1=-1$ 代入$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得

$\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_2=-2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_2=-2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_3=0$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{A}^{99}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^{99}\boldsymbol{A}=\cdots=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{99}$，

即 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$，

故 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3.\end{cases}$